1. LIMIT FUNGSI ALJABAR DAN TRIGONMETRI

Materi Pertemuan 8, Jum'at, 6 Agustus 2021, Belajar PPKM di Rumah

Guru Pengampu : Afrizal, S.Pd, M.PMat

1. Pendahuluan

Sebelumnya sudah dipelajari limit fungsi di kelas XI, tapi hanya pada limit fungsi aljabar. Pada pertemuan ini, kita akan melihat limit fungsi aljabar dan trigonometri.

Berikut kita ingat kembali limit fungsi aljabar di kelas XI, yakni limit khusus yakni turunan.

Jika $f(x)$ mempunyai turunan, maka

$$f'(x) = lim_{h\to 0}\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Contoh 1.1
Tentukan turunan pertama dari $f(x) = 3x^2$.

Penyelesain

$$\begin{aligned} f'(x) &= lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h} \end{aligned}$$

sampai disini, apabila nilai $h = 0$, kita subtitusikan lansung, maka nilai $f'(x) = \frac{0}{0}$ tidak terdefenisi, kita coba dengan menguraikan lebih lanjut.

$$\begin{aligned} f'(x) &= lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h} \\ &= lim_{h\to 0}\frac{3(x^2+2xh+h^2)-3x^2}{h} \\ &= lim_{h\to 0}\frac{(3x^2+6xh+3h^2)-3x^2}{h} \\ &= lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2}{h} \end{aligned}$$

sampai disini, apabila nilai $h = 0$, kita subtitusikan lansung, maka nilai $f'(x) = \frac{0}{0}$ masih tidak terdefenisi, kita coba dengan memfaktorkannya.

$$\begin{aligned} f'(x) &= lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h} \\ &= lim_{h\to 0}\frac{3(x^2+2xh+h^2)-3x^2}{h} \\ &= lim_{h\to 0}\frac{(3x^2+6xh+3h^2)-3x^2}{h} \\ &= lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2}{h} \\ &= lim_{h\to 0}6x+3h \end{aligned}$$

sampai disini, apabila nilai $h = 0$, kita subtitusikan lansung, maka nilai $f'(x) = 6x + 3.0 = 6x$.

Jadi,

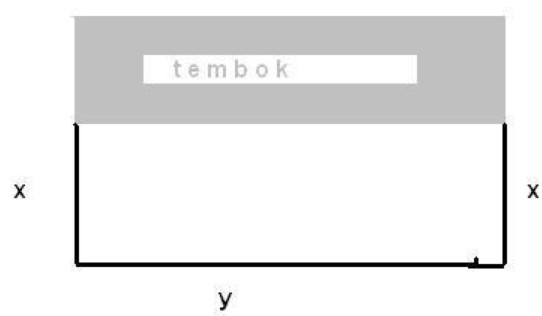
$$\begin{aligned}
f'(x) &= lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{3(x^2+2xh+h^2)-3x^2}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{(3x^2+6xh+3h^2)-3x^2}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2}{h}\\
&= lim_{h\to 0}6x+3h\\
&= 6x+3.0\\
&= 6x
\end{aligned}$$

Disamping itu kita juga perlu mencari nilai dari sebuah limit fungsi, karena nilai dari limit fungsi diperlukan baik dalam kehidupan sehari-hari maupun untuk matematika itu sendiri.

Kita lihat kembali kegunaan sederhana limit fungsi dalam kehidupan sehar-hari, melalui contoh berikut.

Contoh 1.1
Seseorang memagar kandang ayam berbentuk persegi panjang, tetapi sisi depan tidak dipagar karena ada tembok. Panjang pagar 100 meter, berapa lebar pagar agar luas yang didapatkan paling luas.

Penyelesaian
Misalkan lebar pagar x meter, dan panjang pagar dengan y meter seperti gambar dibawah ;



didapatkan

$$\begin{aligned}
x+x+y &= 100\\
2x+y &= 100\\
y &= 100-2x
\end{aligned}$$

dengan luas kandang ayam

$$\begin{aligned}
L &= p.l\\
&= y.x\\
&= (100-2x).x\\
&= 100x-2x^2\\
L(x) &= 100x-2x^2
\end{aligned}$$

Kita dapat memakai limit khusus turunan,

$$\begin{aligned}
L'(x) &= 100 - 4x \\
L'(x) &= 0 \\
100 - 4x &= 0 \\
100 &= 4x \\
4x &= 100 \\
x &= \frac{100}{4} \\
x &= 25
\end{aligned}$$

Jadi luas kandang ayam agar maksimum haruslah $x = 25$ meter atau lebar 25 meter, dengan luas

$$\begin{aligned}
L(x) &= 100x - 2x^2 \\
L(25) &= 100.25 - 2.25^2 \\
&= 2500 - 2.625 \\
&= 2500 - 1250 \\
&= 1250m^2
\end{aligned}$$

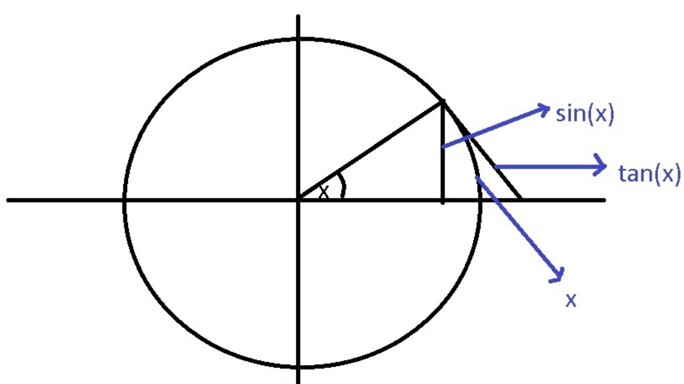
1.2 Limit Fungsi Trigonometri

Berikut kita lihat limit fungsi trigonometri

$$lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1.$$

Untuk membuktikan persamaan limit ini, kita lihat dulu nilai limit fungsi trigonometri menggunakan satuan x radian, mengingat satuan x^0 (derajat) dalam satu lingkaran dibatasi sudut nya hanya 360^0.

Perhatikan gambar 1. dibawah



gambar 1. sudut dalam satuan radian

Besar sudut x dimisalkan dengan panjang busur x lingkaran yang berjari-jari 1 satuan, yang dimulai dari sumbu X positip yang berlawanan dengan arah jarum jam.

Andaikan besar sudutnya dalam x^0,

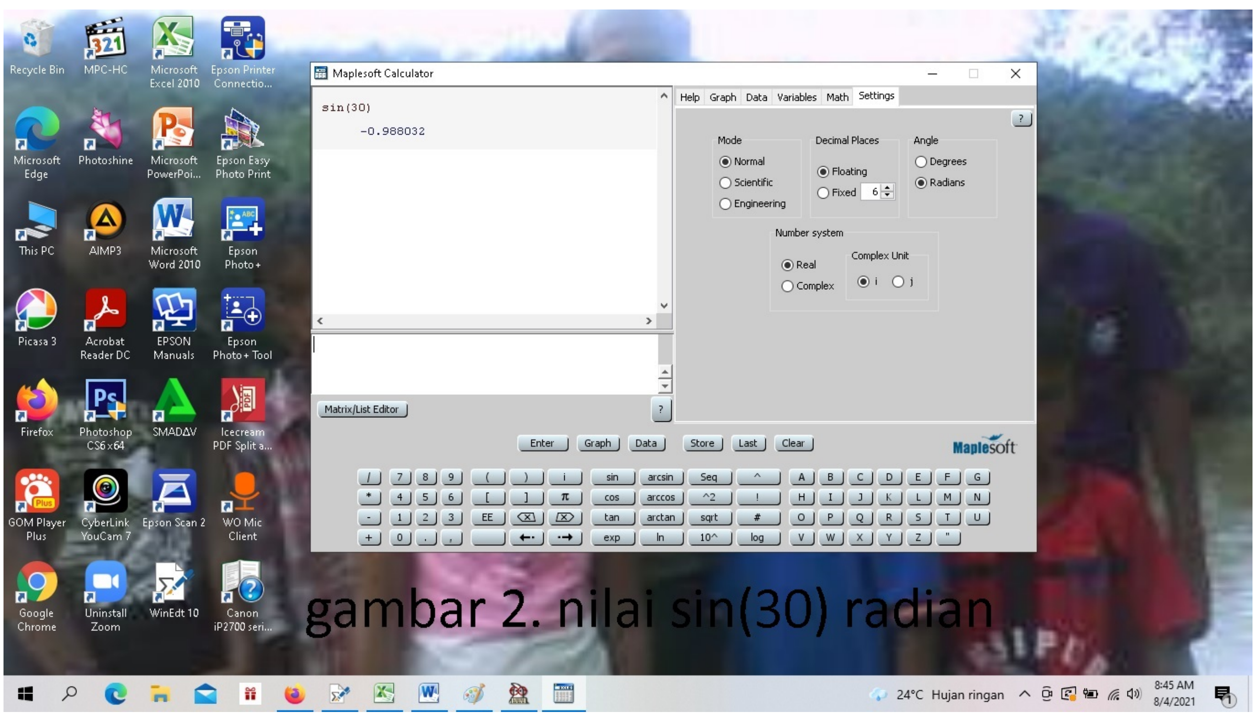
$$\begin{aligned}
\frac{x^0}{360^0} &= \frac{x}{2\pi r}, perbandingansudutdanbusurlingkaran \\
x^0 &= x\frac{360^0}{2\pi}, r = 1 \\
x^0 &= x\frac{180}{\pi}
\end{aligned}$$

dan tentunya,

$$x = x^0 \frac{\pi}{180}$$

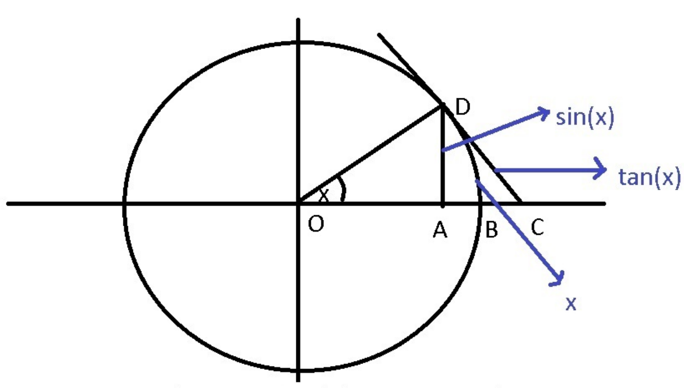
Contoh 2.1
Tentukan nilai $sin(30)$ dalam radian.

$$\begin{aligned}
sin(30)radian &= sin(30.\frac{180}{\pi}) \\
&= sin(30.\frac{180}{3,14159...}) \\
&= sin(30.57,295...^0) \\
&= sin(1718,873...^0) \\
&= sin(4.360^0 + 278,873...^0) \\
&= sin(278,873...^0)kuadran4 \\
&= sin(360 - 81,127...^0) \\
&= -sin(81,127...^0) \\
&= -0,988...
\end{aligned}$$



gambar 2. nilai sin(30) radian

Perhatian gambar 4. dibawah,



gambar 4. sudut dalam satuan radian

Jelas bahwa $sin(x) = \frac{AD}{OD}$, atau $AD = OD.sin(x) = r.sin(x) = 1.sin(x) = sin(x)$, dan $tan(x) = \frac{CD}{OA}$ atau $CD = OA.tan(x) = r.tan(x) = 1.tan(x) = tan(x)$ (CD merupakan garis singgung di titik D). Sehingga

$$\begin{aligned}
sin(x) &< x < tan(x)\\
\frac{sin(x)}{sin(x)} &< \frac{x}{sin(x)} < \frac{tan(x)}{sin(x)}\\
1 &< \frac{x}{sin(x)} < \frac{\frac{sin(x)}{cos(x)}}{sin(x)}\\
1 &< \frac{x}{sin(x)} < cos(x)\\
\frac{1}{1} &> \frac{sin(x)}{x} > \frac{1}{cos(x)}\\
lim_{x\to 0}1 \geq lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} &\geq lim_{x\to 0}\frac{1}{cos(x)}\\
lim_{x\to 0}\frac{1}{cos(x)} \leq lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} &\leq lim_{x\to 0}1\\
\frac{1}{cos(0)} \leq lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} &\leq 1\\
1 \leq lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} &\leq 1
\end{aligned}$$

sehingga

$$lim_{x\to 0}\tfrac{sin(x)}{x} = 1.$$

dengan cara yang sama dapat kita tunjukkan bahwa

$$lim_{x\to 0}\tfrac{x}{sin(x)} = 1.$$

Dan

$$\begin{aligned}
lim_{x\to 0}\frac{tan(x)}{x} &= lim_{x\to 0}\frac{\frac{sin(x)}{cos(x)}}{x}\\
&= lim_{x\to 0}x.\frac{cos(x)}{sin(x)}\\
&= lim_{x\to 0}cos(x).\frac{x}{sin(x)}\\
&= lim_{x\to 0}cos(x).lim_{x\to 0}\frac{x}{sin(x)}\\
&= cos(0).1\\
lim_{x\to 0}\frac{tan(x)}{x} &= 1
\end{aligned}$$

dengan cara yang sama kita dapatkan

$$lim_{x\to 0}\frac{x}{tan(x)} = 1$$

Dari dpersamaan limit diatas, kita bisa dapat menyelesaikan beberapa contoh berikut.

Contoh 3.1
Tentukan nilai limit fungsi berikut

1. $lim_{x\to 0}\frac{sin(4x)+tan(3x)-sin(5x)}{2x}$
2. $lim_{x\to 1}\frac{(3x+1)sin(x-1)}{x^2+2x-3}$

Penyelesaian

1.

$$\begin{aligned}
lim_{x \to 0} \frac{sin(4x) + tan(3x) - sin(5x)}{2x} &= lim_{x \to 0} \frac{sin(4x)}{2x} + lim_{x \to 0} \frac{tan(3x)}{2x} - lim_{x \to 0} \frac{sin(5x)}{2x} \\
&= \frac{4}{2}.lim_{x \to 0} \frac{sin(4x)}{4x} + \frac{3}{2}.lim_{x \to 0} \frac{tan(3x)}{3x} - \frac{5}{2} lim_{x \to 0} \frac{sin(5x)}{5x} \\
&= 2.1 + \frac{3}{2}.1 - \frac{5}{2} \\
&= 2 - \frac{2}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
lim_{x \to 1} \frac{(3x+1)sin(x-1)}{x^2 + 2x - 3} &= lim_{x \to 1} \frac{(3x+1)sin(x-1)}{(x+3)(x-1)} \\
&= lim_{x \to 1} \frac{3x+1}{x+3}.lim_{x \to 1} \frac{sin(x-1)}{(x-1)} \\
&= \frac{3+1}{1+3}.1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Latihan Pertemuan 8

Selesaikan latihan dibawah ini pada buku latihan tulis nama dan kelas di atasnya, di foto dan di kirim kan ke wa guru pengampu.

1. Tentukan nilai dari

$$lim_{x \to 0} \tfrac{sin(x) + tan(2x)}{3x - sin(4x)}$$

2. Tentukan nilai dari

$$lim_{x \to 0} \tfrac{sin(4x) + sin(2x)}{3x cos(x)}$$