TURUNAN FUNGSI ALJABAR

Materi Pertemuan 28, minggu KEEMPAT april 2021, Bantuan Belajar di Rumah

10. Fungsi naik dan turun

Gradien garis

Misalkan garis melalui dua titik (x_1, x_2) dan (x_2, y_2), didefenisikan gradien garis atau kecondongan dari suatu garis yakni m dengan

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Misalkan sebuah fungsi dengan melalui titik $(x_1, f(x_1))$ dan $((x_1+h), f(x_1+h))$ sehingga gradien

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{x_1+h-x_1} \\ &= \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \end{aligned}$$

apabila $h \to 0$ artinya garis yang dibentuk dengan gradien diatas menyinggung fungsi $f(x)$ pada $(x_1, f(x_1))$.

Sehingga

$$\begin{aligned} m &= lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \\ m &= f'(x_1) = lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \end{aligned}$$

Contoh 11.

Tentukan persamaan garis singgung pada $x = 30$, fungsi parabola $f(x) = 100x - 2x^2$

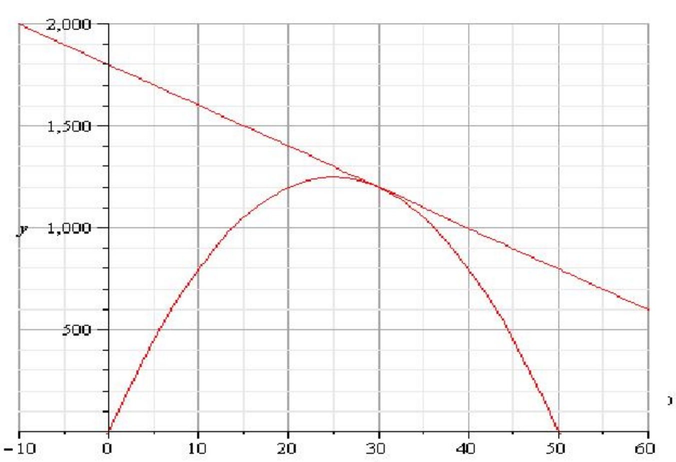
Jawab

$$\begin{aligned} f'(x) &= lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= f'(x) = 100 - 4x \\ m &= f'(x_1) = 100 - 4x_1 \\ m &= f'(30) = 100 - 4.30 = -20 \end{aligned}$$

Persamaan garis singgung pada titik $(30, f(30) = 100.30 - 2.30^2 = 1200)$ adalah

$$\begin{aligned} f(x) &= m(x-x_1) + f(x_1) \\ &= -20(x-30) + 1200 \\ &= -20x + 600 + 1200 \\ f(x) &= -20x + 1800 \end{aligned}$$

Dapat dibuat grafiknya



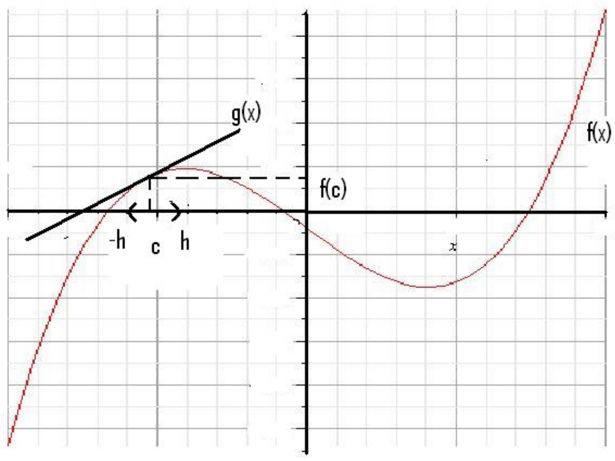
11. Teorema Nilai Rata-rata

Defenisi 2.
Misalkan $f(x)$ dengan $(c+h)-(c) > 0$ jika $f(c+h)-f(c) > 0$, maka fungsi $f(x)$ adalah fungsi naik, dan $f(c+h)-f(c) < 0$, maka fungsi $f(x)$ adalah fungsi turun pada interval $(c, f(c))$ tersebut.

Secara geometris untuk $f'(c) > 0$, maka fungsi akan naik.
Ini dapat kita lihat grafik fungsi $f(x)$ dan garis singgung $g(x)$ dititik $(c, f(c))$, dimana $(c+h)-c > 0$ dengan gradien

$$m = f'(c) = lim_{h\to 0}\tfrac{f(c+h)-f(c)}{h} > 0$$

jelas $lim_{h\to 0} f(c+h) - f(c) > 0$, yang mengakibatkan fungsi $f(x)$ adalah fungsi naik.



Selanjutnya dapat kita lihat jika fungsi itu naik, maka $f'(c) > 0$.
Fungsi naik artinya

$$lim_{h\to 0} f(c+h) - f(c) > 0$$
$$lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0$$
$$lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = m = f'(c) > 0$$

Dengan cara yang sama dapat kita lihat, jika $f'(c) < 0$, maka fungsi akan turun, dan jika $f'(c) = 0$, tentunya fungsi tidak naik atau turun atau maksimum atau minimum fungsi. Sebaliknya untuk fungsi maksimum atau minimum terjadi pada $f'(c) = 0$ pada interval $(c, c+h)$ seperti teorema berikut :

Teorema Maksimum minimum
Misalkan f mempunyai turunan dan mencapai nilai maksimum atau minimum lokal pada (a, b), maka terdapat $c \in (a, b)$, sedemikian sehingga $f'(c) = 0$.

Bukti
Buktinya dapat kita lihat pada penjelasan di atas bahwa $f'(c) > 0$ adalah fungsi naik dan $f'(c) < 0$ adalah fungsi turun, jika fungsi maksimum atau minimum (tidak naik ataupun turun), jelas $f'(c) = 0$

Teorema Rolle
Misalkan $f(x)$ mempunyai turunan pada (a, b) dan $f(a) = f(b)$, maka terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga $f'(c) = 0$.

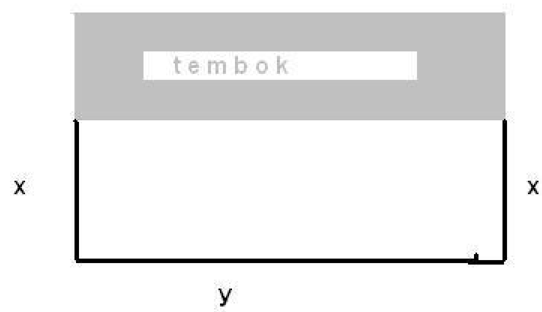
Bukti
Karena $f(a) = f(b)$, kemungkinan keadaan fungsinya pada interbal (a, b), ada tiga yakni

1. fungsi ada maksimum, jelas dari teorema maksimum minimum, $f'(c) = 0$.
2. fungsi ada minimum, jelas dari teorema maksimum minimum diatas, $f'(c) = 0$.

3. fungsi tidak ada maksimum dan tidak ada minimum atau fungsi konstan, artinya fungsi tidak naik dan tidak turun atau artinya fungsi pada interval (a, b) itu, $f'(c) = 0$.

Contoh 12
Seseorang memagar kandang ayam berbentuk persegi panjang, tetapi sisi depan tidak dipagar karena ada tembok. Panjang pagar 100 meter, berapa lebar pagar agar luas yang didapatkan paling luas.

Penyelesaian
Misalkan lebar pagar x meter, dan panjang pagar dengan y meter seperti gambar dibawah ;



didapatkan

$$\begin{aligned} x + x + y &= 100 \\ 2x + y &= 100 \\ y &= 100 - 2x \end{aligned}$$

dengan luas kandang ayam

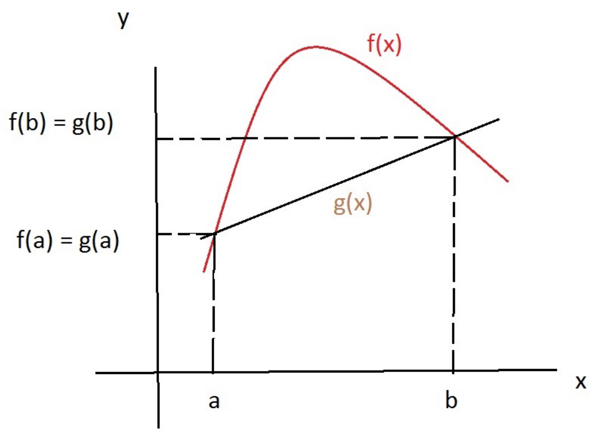
$$\begin{aligned} L &= p.l \\ &= y.x \\ &= (100 - 2x).x \\ &= 100x - 2x^2 \\ L(x) &= 100x - 2x^2 \end{aligned}$$

Karena fungsi $L(x)$ itu adalah fungsi parabola, maka ada maksimum atau minimum, menurut teorema maksimum minimum, maka $L'(c) = 100 - 4c = 0$, sehingga $c = 25$, artinya lebar pagar maksimum terjadi pada $x = 25$ meter, dengan luas $L(25) = 100.25 - 2.25^2 = 1250$ m^2

Teorema Nilai Rata-rata
Misalkan $f(x)$ mempunyai turunan pada (a, b), maka terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga

$$f'(c) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ini dapat kita tunjukkan dengan memisalkan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ yang berpotongan di $(a, g(a))$ dan $(b, g(b))$, seperti grafik berikut :



Persamaan garis melalui $(a, g(a))$ dan $(b, g(b))$ adalah

$$g(x) - b = \frac{g(b)-g(a)}{b-a} x(x-a)$$

Kemudian kedua ruas dikali dengan negatif dan ditambah dengan $f(x)$, sehingga

$$f(x) - g(x) - b = f(x) - \frac{g(b)-g(a)}{b-a}(x-a)$$

Misalkan fungsi $s(x) = f(x) - g(x)$, dan tentunya $s(b) = f(b) - g(b) = f(b) - f(b) = 0$ dan $s(a) = f(a) - g(a) = 0$.

$$s(x) = f(x) - g(x) - b = f(x) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - a)$$
$$s'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

Karena $s(a) = s(b) = 0$, menurut torema role terdapat c sedemikian sehingga

$$s'(c) = f'(c) - g'(c) = f'(c) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0$$
$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

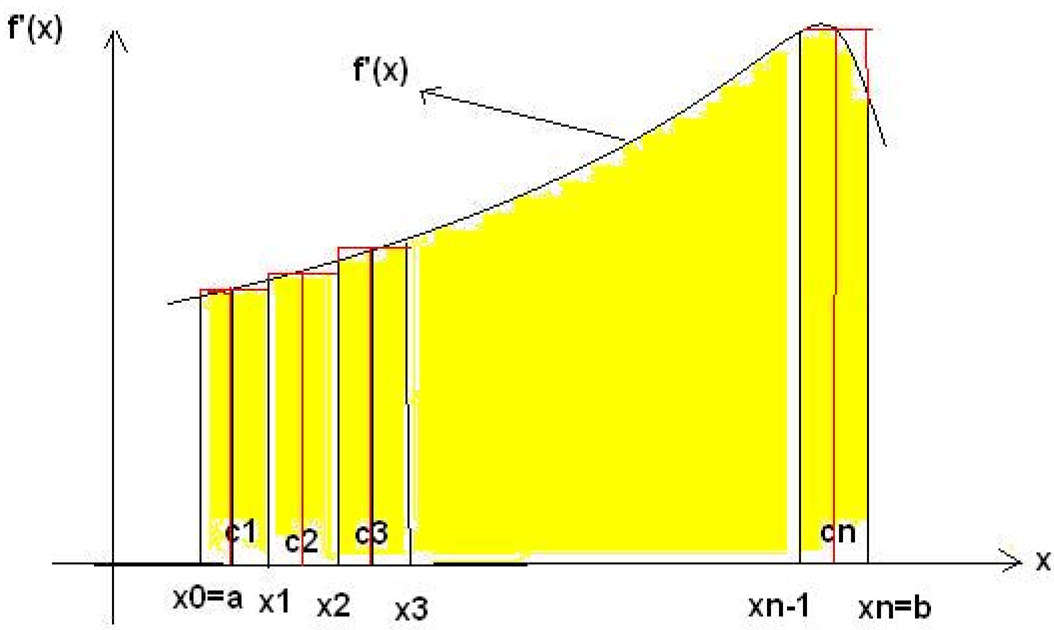
Contoh 12
Tentukan nilai c sehingga berlaku teorema nilai rata-rata, dimana $f(x) = x^2 + 3x + 2$ pada $(1, 3)$.

Penyelesaian
$f(3) = 3^2 + 3.3 + 2 = 9 + 9 + 2 = 20$
$f(1) = 1^2 + 3.1 + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$
$f'(c) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{20-6}{2} = \frac{14}{2} = 7$

$f(x) = x^2 + 3x + 2$
$f'(x) = 2x + 3$
$f'(c) = 2c + 3$
$2c + 3 = 7$
$2c = 7 - 3$
$2c = 4$

$c = \frac{4}{2} = 2.$

11. Integral dan Luas Daerah Dibawah Kurva



Misalkan ada kurva $f'(x)$, dan kita batasi pada interval (a, b), kemudian interval ini kita bagi menjadi beberapa bagian misalnya dengan $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$.
Menurut teorema nilai rata-rata pada (x_0, x_1) terdapat c_1 sehingga
$f'(c_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \Leftrightarrow f'(c_1).(x_1 - x_0) = f(x_1) - f(x_0)$
pada (x_1, x_2)
$f'(c_2) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Leftrightarrow f'(c_2).(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$
pada (x_2, x_3)
$f'(c_3) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \Leftrightarrow f'(c_3).(x_3 - x_2) = f(x_3) - f(x_2)$
.
.
.
pada (x_{n-1}, x_n)
$f'(c_n) = \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} \Leftrightarrow f'(c_n).(x_n - x_{n-1}) = f(x_{n-1}) - f(x_n)$
Misalkan $x_i - x_{i-1} = \Delta i$
Sehingga
$f'(c_1).\Delta_1 = f(x_1) - f(x_0) = f(a) - f(x_0)$
$f'(c_2).\Delta_2 = f(x_2) - f(1)$
$f'(c_3).\Delta_3 = f(x_3) - f(2)$
.
.
.
$f'(c_n).\Delta_n = f(x_n) - f(n-1) = f(b) - f(n-1)$
Untuk $n \to \infty$
Maka Luas daerah dibawah kurva $f'(x)$ adalah
$L = f'(c_1).\Delta_1 + f'(c_2).\Delta_2 + f'(c_3).\Delta_3 + ...f'(c_n).\Delta_n = -f(a) + f(b)$
$L = \sum_{i=1}^{n} f'(c_i)\Delta_i = f(b) - f(a).$

Contoh 13

Tentukan luas daerah dibawah kurva $f'(x) = 2x + 3$ dibatasi pada $(1, 3)$

Penyelesaian
Karena $f'(x) = 2x + 3$, kita dapat membuat fungsi $f(x) = x^2 + 3x + 2$
$f(3) = 20$
$f(1) = 6$
$L = f(3) - f(1) = 20 - 6 = 14.$

Untuk menentukan luas dibawah kurva $f'(x)$, kita membutuhkan $f(x)$. Proses dari $f'(x)$ mendapatkan $f(x)$ sering disebut dengan integral dengan simbol $\int$. Sehingga $\int f'(x)dx = f(x)$, jadi $\int (2x + 3)dx = x^2 + 3x + 2$.

Karena juga $\int (2x + 3)dx = x^2 + 3x + 6$ atau $\int (2x + 3)dx = x^2 + 3x + C$, kita buat saja $\int (2x + 3)dx = x^2 + 3x + C = f(x) = l(x) + C$ Dengan sedikit perubahan kita bisa membuat $\int g(x)dx = h(x) + C$, secara umum dibuat

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Dengan ini kita buat luas daerah dibawah kurva $f(x)$ adalah $L = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$

$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)$.

Dapat disimpulkan luas daerah dibawah kurva $f(x)$ dengan batas bawah a dan batas atas b atau pada interval (a, b) adalah

$$L = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Contoh 14
Tentukan luas daerah di bawah kurva $f(x) = 2x + 5$ dengan batas $(2, 4)$.

Jawab
$L = \int_a^b f(f)dx = \int_2^4 (2x + 5)dx = x^2 + 5x|_2^4 = 4^2 + 5.2 - (2^2 + 5) = 16 + 10 - 4 - 5 = 17.$

Latihan Pertemuan 28

Selesaikan latihan dibawah ini pada buku latihan tulis nama dan kelas di atasnya, di foto dan di kirim kan ke wa guru pengampu sebelum pertemuan minggu berikutnya.

1. Tentukan
   (a) $\int (2x + 7)dx$
   (b) $\int (3x^2 + 4x)dx$
   (c) $\int (3x^4 + 8x)dx$

2. Tentukan luas daerah dibawah kurva
   (a) $f(x) = 2x - 4$ dengan batas $(3, 5)$.
   (b) $f(x) = 3x^2 + 7$ dengan batas $(2, 6)$.