TURUNAN FUNGSI ALJABAR

Materi Pertemuan 27, minggu KEEMPAT april 2021, Bantuan Belajar di Rumah

Contoh 7
Tunjukkan bahwa jika $f(x) = ax^n$, maka $f'(x) = anx^{n-1}$

Bukti

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^n \\
f'(x) &= lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^n - ax^n}{h} \\
&= lim_{h\to 0}\frac{a(\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + ... + \binom{n}{n}h^n) - ax^n}{h} \\
&= lim_{h\to 0}\frac{a\binom{n}{0}x^n + a\binom{n}{1}x^{n-1}h + a\binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + ... + a\binom{n}{n}h^n - ax^n}{h} \\
&= lim_{h\to 0}\frac{ax^n + a\binom{n}{1}x^{n-1}h + a\binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + ... + ah^n - ax^n}{h} \\
&= lim_{h\to 0}\frac{a\binom{n}{1}x^{n-1}h + a\binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + ... + ah^n}{h} \\
&= lim_{h\to 0}a\binom{n}{1}x^{n-1} + a\binom{n}{2}x^{n-2}h + ... + ah^{n-1} \\
&= a\binom{n}{1}x^{n-1} + a\binom{n}{2}x^{n-2}.0 + ... + a.0^{n-1} \\
&= a\binom{n}{1}x^{n-1} \\
&= a\frac{n!}{1!(n-1)!}x^{n-1} \\
&= a\frac{n(n-1)(n-2)...1}{(n-1)(n-2)...1}x^{n-1} \\
&= anx^{n-1}
\end{aligned}$$

5. Limit Fungsi Aljabar

Telah disebutkan sebelumnya jika $f(x) = 3x^2$, maka

$$\begin{aligned}
f'(x) &= lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h}
\end{aligned}$$

disini nilai $h = 0$ tidak dapat disubstitusi lansung, karena mengakibatkan $f'(x)$ atau nilai limitnya tidak terdefenisi, sehingga mungkin kita faktorkan, menjadi

$$\begin{aligned}
f'(x) &= lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{3(x^2+2xh+h^2)-3x^2}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-3x^2}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2}{h}\\
&= lim_{h\to 0}6x+3h
\end{aligned}$$

disini nilai limitnya sudah bisa disubtitusi lansung untuk $h = 0$, sehingga

$$\begin{aligned}
f'(x) &= lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{3(x^2+2xh+h^2)-3x^2}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-3x^2}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2}{h}\\
&= lim_{h\to 0}6x+3h\\
&= 6x+3.0\\
&= 6x+0\\
&= 6x
\end{aligned}$$

jadi bisa disimpulkan untuk menentukan nilai limit sebuah fungsi aljabar dapat dilakukan secara lansung , jika nilai limitnya tidak terdefenisi, dapat kita faktorkan terlebih dahulu atau mungkin dikalikan dengan akar sekawannya.

Contoh 8
Tentukan nilai limit fungsi berikut

$$lim_{h\to 0}3x^2+5xh+h^2$$

Jawab

$$lim_{h\to 0}3x^2+5xh+h^2 = 3x^2+5x.0+0^2 = 3x^2+0+0 = 3x^2$$

Contoh 9.
Tentukan nilai limit fungsi berikut

$$lim_{x\to 2}\tfrac{x^2-5x+6}{x-2}$$

Jawab

$$lim_{x\to 2}\tfrac{x^2-5x+6}{x-2} = lim_{x\to 2}\tfrac{(x-2)(x-3)}{x-2} = lim_{x\to 2}x-3 = 2-3 = -1$$

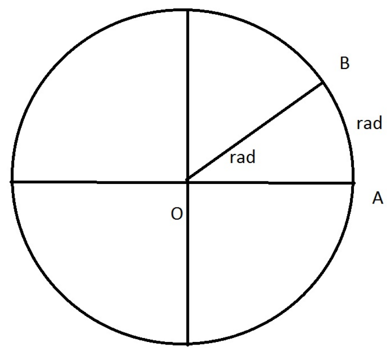
6. Limit Fungsi Trigonometri

Sebelumnya telah didapatkan bahwa untuk mendapatkan turunan suatu fungsi, kita terlebih dahulu menentukan limit khusus dari fungsi tersebut, yang disebut dengan turunan. Baik berikut ini kita lihat limit fungsi trigonometri.

Kita dalam hal ini tetap memakai teorema limit sebelumnya, dan juga menentukan nilai limit terlebih dahulu, bisa dilakukan dengan menentukan secara lansung.

7. Limit fungsi $f(x) = \frac{x}{sin(x)}$ dan semisalnya.

Kita lihat terlebih dahulu sudut dalam radian, perhatikan gambar dibawah ini.

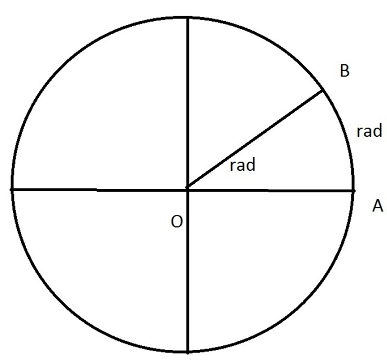


gambar 2

Pertama kita menginginkan sudut AOB sama dengan panjang busur AB yaitu x rad dengan jari-jari lingkaran OA adalah 1 satuan. Sehingga
$\frac{panjangbusurAB}{Kelilinglingkaran} = \frac{\angle AOB^0}{360^0}$

$$\frac{xRad}{2\pi r} = \frac{\angle AOB^0}{360^0}$$
$$x \text{ rad} = \frac{\angle AOB^0 \pi}{180^0}$$

Selanjutnya perhatikan gambar dibawah



gambar 2

Kita peroleh

$$\text{Panjang } BC \leq \text{ busursr } AB \leq \text{ panjang } BD$$
$$sin(x) \leq x \leq tan(x)$$
$$sin(x) \leq x \leq \frac{sin(x)}{cos(x)}$$
$$1 \leq \frac{x}{sin(x)} \leq \frac{1}{cos(x)}$$
$$\text{dan apabila } x \to 0, \text{ maka}$$
$$lim_{x\to 0}1 \leq lim_{x\to 0}\frac{x}{sin(x)} \leq lim_{x\to 0}\frac{1}{cos(x)}$$
$$1 \leq lim_{x\to 0}\frac{x}{sin(x)} \leq 1$$

Sehingga menurut teorema apit

$$lim_{x\to 0}\frac{x}{sin(x)} = 1$$

Dengan sedikit manipulasi aljabar, kita bisa mendapatkan kesimpulan berikut

1. $lim_{x \to 0} \frac{sin(mx)}{nx} = \frac{m}{n}$
2. $lim_{x \to 0} \frac{nx}{sin(mx)} = \frac{n}{m}$
3. $lim_{x \to 0} \frac{nx}{tan(mx)} = \frac{n}{m}$
4. $lim_{x \to 0} \frac{tan(mx)}{nx} = \frac{m}{n}$
5. $lim_{x \to 0} \frac{sin(mx)}{sin(nx)} = \frac{m}{n}$
6. $lim_{x \to 0} \frac{tan(mx)}{tan(nx)} = \frac{m}{n}$
7. $lim_{x \to 0} \frac{sin(mx)}{tan(nx)} = \frac{m}{x}$
8. $lim_{x \to 0} \frac{tan(mx)}{sin(nx)} = \frac{m}{x}$

Contoh 10.
Tentukan nilai

$$lim_{x \to 0} \frac{tan(5x)}{3x}$$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} lim_{x \to 0} \frac{tan(5x)}{3x} &= lim_{x \to 0} (\frac{tan(5x)}{3x} . \frac{5}{5}) \\ &= lim_{x \to 0} (\frac{tan(5x)}{5x} . \frac{5}{3}) \\ &= lim_{x \to 0} \frac{tan(5x)}{5x} . lim_{x \to 0} \frac{5}{3} \\ &= 1 . \frac{5}{3} \\ &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Contoh 11.
Tentukan nilai limit

$$lim_{x \to 0} \frac{sin^2(4x)}{x^2}$$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} lim_{x \to 0} \frac{sin^2(4x)}{x^2} &= lim_{x \to 0} \frac{sin(4x).sin(4x)}{x.x} \\ &= lim_{x \to 0} \frac{sin4x)}{x} . lim_{x \to 0} \frac{sin(4x)}{x} \\ &= 4.4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

9. Limit Tak Hingga Fungsi.

Untuk fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$, apabila nilai x semakin besar mengakibatkan $f(x)$ semakin kecil. Untuk x menuju tak hingga mengakibatkan nilai $f(x) = \frac{1}{x}$ menuju nol. Disimpulkan

$$lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Latihan Pertemuan 27

Selesaikan latihan dibawah ini pada buku latihan tulis nama dan kelas di atasnya, di foto dan di kirim kan ke wa guru pengampu sebelum pertemuan minggu berikutnya.

1. Tentukan nilai limit dari

$$lim_{x \to -2} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$$