5. BARISAN DAN DERET

Materi Pertemuan 17, minggu pertama, maret 2021,

Guru Pengampu : Afrizal, S.Pd, M.PMat

5.3 Barisan dan Deret Geometri

Untuk memahami barisan dan deret geometri, kita lihat kembali paradoks zeno,

Kura-kura berlomba lari dengan Achilles, dimana kecepatan Achilles dua kali lebih cepat dari kura-kura. Misalkan kura-kura mulai berlari lebih duluan, beberapa saat kemudian barulah Achilles mulai berlari. Apakah Achilles dapat menyusul atau mendahului kura-kura?.

Pada saat kura-kura menempuh $\frac{1}{2}$ suatu jarak tertentu, Achilles baru mulai berlari. Pada kura-kura maju $\frac{1}{4}$ jarak tersebut, Achilles baru menempuh $\frac{1}{2}$ jarak tersebut. Pada kura-kura maju $\frac{1}{8}$ lagi, Achilles maju hanya $\frac{1}{4}$ jarak tersebut, begitu seterusnya, jadi Achilles tidak pernah mendahului kura-kura.

Untuk mengatasi masalah ini, maka perlu dibuat

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + ... = 1.$$

Dengan mengikuti ini dapat kita buat

$$2 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + ... = 2 + 1 + 1 = 4.$$

Deret ,

$$2 + 1 + \tfrac{1}{2} + ...$$

Deret ini sering disebut dengan deret geometri, dengan suku awal adalah 2 dan pengali tetap atau sering disebut rasio adalah $\frac{1}{2}$.

Deret di atas dapat kita buat menjadi

$$\begin{gathered}
2 + 2.\tfrac{1}{2} + 1.\tfrac{1}{2} + ... \\
2 + 2.\tfrac{1}{2} + 2.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} + ... \\
2 + 2.\tfrac{1}{2} + 2.\tfrac{1}{2}^{2} + ... \\
2 + 2.\tfrac{1}{2}^{2-1} + 2.\tfrac{1}{2}^{3-1} + ... + 2.\tfrac{1}{2}^{n-1}.
\end{gathered}$$

Kemudian jika

$$\begin{gathered}
2 + 2.\tfrac{1}{2}^{2-1} + 2.\tfrac{1}{2}^{3-1} + ... + 2.\tfrac{1}{2}^{n-1} = s, ...1). \\
2.\tfrac{1}{2} + 2.\tfrac{1}{2}^{2-1}.\tfrac{1}{2} + 2.\tfrac{1}{2}^{3-1}.\tfrac{1}{2} + ... + 2.\tfrac{1}{2}^{n-1}.\tfrac{1}{2} = s.\tfrac{1}{2}, ...2).
\end{gathered}$$

$1) - 2)$

$$\begin{aligned}
2 - 2.\frac{1}{2}^{n-1}.\frac{1}{2} &= s - s.\frac{1}{2} \\
2(1 - \frac{1}{2}^{n-1}.\frac{1}{2}) &= s(1 - \frac{1}{2} \\
2(1 - \frac{1}{2}^{n}) &= s(1 - \frac{1}{2}) \\
s &= \frac{2(1 - \frac{1}{2}^{n})}{1 - \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Dapat duga simpulan kita

$$\begin{aligned}
u_n &= ar^{n-1} \\
s_n &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}
\end{aligned}$$

Selanjutnya apabila $n \to \infty$ dan $|r| < 1$, kita menduga bahwa $r^n = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} s_\infty &= \frac{a(1-0)}{1-r} \\ s_\infty &= \frac{a}{1-r} \end{aligned}$$

Contoh 1.5
Tentukan jumlah deret geometri tak hingga berikut ...

$$27 - 9 + 3 - \tfrac{1}{3} + ...$$

Penyelesaian
Diketahui $a = 27$, dan $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{27}{-9} = -\frac{1}{3}$, sehingga

$$\begin{aligned} s_\infty &= \frac{a}{1-r} = \frac{27}{1-(-\frac{1}{3})} \\ &= \frac{27}{1+\frac{1}{3}} = \frac{27}{\frac{4}{3}} \\ &= 27.\frac{3}{4} = \frac{81}{4} \end{aligned}$$

Contoh 2.5
Suku kedua suatu deret geometri adalah $\frac{3}{2}$. Jika jumlah tak hingga deret tersebut adalah 6, tentukan suku keenam deret tersebut.

Penyelesaian
Diketahui $u_2 = \frac{3}{2}$, dan $s_\infty = 6$, sehingga

$$\begin{aligned} u_n &= ar^{n-1} \\ u_2 &= ar^{2-1} \\ \frac{3}{2} &= ar \\ ar &= \frac{3}{2} \\ a &= \frac{3}{2r} \end{aligned}$$

dari

$$\begin{aligned} s_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ 6 &= \frac{\frac{3}{2r}}{1-r} \\ 6 &= \frac{3}{2r}.\frac{1}{1-r} \\ 6 &= \frac{3}{2r-2r^2} \\ 6(2r-2r^2) &= 3 \\ 2(2r-2r^2) &= 1 \\ 4r-4r^2-1 &= 0 \\ 4r^2-4r+1 &= 0 \\ (2r-1)^2 &= 0 \\ 2r-1 &= 0, \\ r &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
u_n &= ar^{n-1} \\
u_2 &= ar^{2-1} \\
\frac{3}{2} &= ar \\
ar &= \frac{3}{2} \\
r &= \frac{3}{2a}
\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
s_\infty &= \frac{a}{1-r} \\
6 &= \frac{a}{1-\frac{3}{2a}} \\
6 &= \frac{a}{\frac{2a-3}{2a}} \\
6 &= a.\frac{2a}{2a-3} \\
6(2a-3) &= 2a^2 \\
3(2a-3) &= a^2 \\
6a-9 &= a^2 \\
a^2-6a+9 &= 0 \\
(a-3)^2 &= 0 \\
a-3 &= 0 \\
a &= 3
\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
u_n &= ar^{n-1} \\
u_6 &= 3.\frac{1}{2}^{6-1} \\
&= 3.\frac{2}{2}^{5} \\
&= 3.\frac{2}{32} \\
&= \frac{81}{4}
\end{aligned}$$

5.4 Penggunaan barisan dan deret geometri

Misalkan kita menabung di Bank sebesar Rp 5.000.000,00, pihak bank memberikan bunga sebesar $0,5\%$ tiap bulan dengan bunga majemuk. Tentunya besar uang kita pada akhir bulan pertama adalah.

$$\begin{aligned}
M_1 &= M_0 + B_1 \\
&= 5000000 + 5000000.0,5\% \\
&= 5000000(1+0,5\%)
\end{aligned}$$

dan tentunya besar uang pada akhir bulan kedua adalah

$$\begin{aligned}
M_2 &= M_1 + B_1 \\
&= 5000000(1+0,5\%) + 5000000(1+0,5\%).0,5\% \\
&= 5000000(1+0,5\%)(1+0,5\%) \\
&= 5000000(1+0,5\%)^2
\end{aligned}$$

karena modal awal kita belum mengalami perkembangan, maka kita dapat mengatakan bahwa

$$M_n = 5000000(1 + 0,5\%)^n$$

Barisan

$$M_0, M_1, M_2, ..., M_n$$

atau

$$5000000, 5000000(1 + 0,5\%), 5000000(1 + 0,5\%)^2, ..., 5000000(1 + 0,5\%)^n$$

membentuk sebuah barisan geometri, dengan suku awal 5000000, dan rasio $1 + 0,5\%$, sehingga

$$\begin{aligned} u_n &= ar^{n-1} \\ M_n &= 5000000.(1 + 0,5\%)^n \end{aligned}$$

dan simpulan dugaan kita

$$M_n = M_0(1 + b\%)^n$$

Dapat pula kita buat simpulan, apabila sebuah benda mengalami perkembangan mengikuti seperti perkembangan uang di bank akan mengikuti persamaan diatas, dan mengalami penyusutan dengan persamaan;

$$M_n = M_0(1 - b\%)^n$$

Misalkan sebuah benda atau makhluk hidup mengalami perkembangan mengikuti barisan geometri dengan perkembangan tiap bulan sebesar $b\%$ selama n bulan, dengan perkembangan pada n bulan adalah M_n dan dengan perkembangan awal M_0, mengikuti

$$M_n = M_0(1 - b\%)^n$$

andaikan perkembangan itu tiap hari, persamaannya menjadi ;

$$\begin{aligned} M_n &= M_0(1 - b\%)^n \\ M_{n.30} &= M_0(1 + \frac{b\%}{30})^{n.30} \\ M_{n.m} &= M_0(1 + \frac{b\%}{m})^{n.m} \end{aligned}$$

untuk perkembangan tiap saat, artinya $m \to \infty$ dengan matematika lanjut dapat di buat menjadi ;

$$\begin{aligned} M_n &= M_0(1 - b\%)^n \\ M_{n.30} &= M_0(1 + \frac{b\%}{30})^{n.30} \\ M_{n.m} &= M_0(1 + \frac{b\%}{m})^{n.m} \\ M_{m\to\infty} &= limit_{m\to\infty} M_0(1 + \frac{b\%}{m})^{n.m} \\ &= M_0 e^{b\%.n}, e = 2,7182818285... \end{aligned}$$

Contoh 3.5
Suatu tanaman selama setahun tingginya bertambah 4% setiap bulan. Jika pada permulaan tingginya 0,5 meter, tentukan tinggi tanaman itu setelah satu tahun.

Penyelesaian

Andaikan tananman tersebut pertumbuhannnya mengikuti barisan geometri, kita bisa membuat $b\% = 4\%$, $M_0 = 0,5$, dan $n = 12$, dengan tinggi pohan setelah satu tahun tersebut adalah

$$\begin{aligned}
M_n &= M_0(1 + (1 + b\%)^n \\
M_{12} &= 0,5(1 + 4\%)^{12} \\
&= 0,5(1,04)^12 \\
&= 0,5.1,601... \\
&= 0,8005...
\end{aligned}$$

apabila pertumbuhannya di misalkan tiap saat, maka tinggi pohon selama satu tahun adalah

$$\begin{aligned}
M_{m\to\infty} &= limit_{m\to\infty} M_0(1 + \frac{b\%}{m})^{n.m} \\
&= M_0 e^{b\%.n}, e = 2,7182818285... \\
&= 0,5.2,71828...^{4\%.12} \\
&= 0,5.2,71828...^{\frac{48}{100}} \\
&= 0,5.2,71828...^{0,48} \\
&= 0,5.1,6160... \\
&= 0,808...
\end{aligned}$$

Latihan Pertemuan 17

Selesaikan latihan dibawah ini pada buku latihan tulis nama dan kelas di atasnya, di foto dan di kirim kan ke wa guru pengampu sebelum pertemuan minggu berikutnya.

1. Diketahui suku keempat suatu deret aritmetika adalah 10 dan jumlah delapan suku pertamanya adalah 96, hitung jumlah lima belas suku pertama deret tersebut.
2. Hitunglah jumlah semua bilangan kelipatan 7 di antara 200 dan 400.
3. Tiga bilangan merupakan deret aritmetika dengan jumlah 54. Jika suku ketiga ditambah 3, maka deret itu menjadi deret geometri, tentukan ketiga bilangan itu.
4. Jumlah dua suku pertama deret geometri adalah $\frac{4}{3}$ dan jumlah dua suku berikutnya adalah 12. Hitunglah jumlah suku kelima hingga suku kedelapan deret geometri tersebut.
5. Sebuah pohon di hutan tingginya bertambah 5% setiap bulan dari pengamatan awal 60 cm. Tentukan tinggi pohon setelah 10 bulan. (Andaikan pertumbuhan tinggi pohon mengikuti barisan geometri)