5. BARISAN DAN DERET

Materi Pertemuan 16, minggu keempat, februari 2021,

Guru Pengampu : Afrizal, S.Pd, M.PMat

5.3 Barisan dan Deret Geometri

Untuk memahami barisan dan deret geometri, kita lihat kembali paradoks zeno,

Kura-kura berlomba lari dengan Achilles, dimana kecepatan Achilles dua kali lebih cepat dari kura-kura. Misalkan kura-kura mulai berlari lebih duluan, beberapa saat kemudian barulah Achilles mulai berlari. Apakah Achilles dapat menyusul atau mendahului kura-kura?.

Pada saat kura-kura menempuh $\frac{1}{2}$ suatu jarak tertentu, Achilles baru mulai berlari. Pada kura-kura maju $\frac{1}{4}$ jarak tersebut, Achilles baru menempuh $\frac{1}{2}$ jarak tersebut. Pada kura-kura maju $\frac{1}{8}$ lagi, Achilles maju hanya $\frac{1}{4}$ jarak tersebut, begitu seterusnya, jadi Achilles tidak pernah mendahului kura-kura.

Untuk mengatasi masalah ini, maka perlu dibuat

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + ... = 1.$$

Dengan mengikuti ini dapat kita buat

$$2 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + ... = 2 + 1 + 1 = 4.$$

Deret ,

$$2 + 1 + \tfrac{1}{2} + ...$$

Deret ini sering disebut dengan deret geometri, dengan suku awal adalah 2 dan pengali tetap atau sering disebut rasio adalah $\frac{1}{2}$.

Deret di atas dapat kita buat menjadi

$$\begin{gathered}
2 + 2.\tfrac{1}{2} + 1.\tfrac{1}{2} + ... \\
2 + 2.\tfrac{1}{2} + 2.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} + ... \\
2 + 2.\tfrac{1}{2} + 2.\tfrac{1}{2}^{2} + ... \\
2 + 2.\tfrac{1}{2}^{2-1} + 2.\tfrac{1}{2}^{3-1} + ... + 2.\tfrac{1}{2}^{n-1}.
\end{gathered}$$

Kemudian jika

$$\begin{gathered}
2 + 2.\tfrac{1}{2}^{2-1} + 2.\tfrac{1}{2}^{3-1} + ... + 2.\tfrac{1}{2}^{n-1} = s, ...1). \\
2.\tfrac{1}{2} + 2.\tfrac{1}{2}^{2-1}.\tfrac{1}{2} + 2.\tfrac{1}{2}^{3-1}.\tfrac{1}{2} + ... + 2.\tfrac{1}{2}^{n-1}.\tfrac{1}{2} = s.\tfrac{1}{2}, ...2).
\end{gathered}$$

$1) - 2)$

$$\begin{aligned}
2 - 2.\frac{1}{2}^{n-1}.\frac{1}{2} &= s - s.\frac{1}{2} \\
2(1 - \frac{1}{2}^{n-1}.\frac{1}{2}) &= s(1 - \frac{1}{2} \\
2(1 - \frac{1}{2}^{n}) &= s(1 - \frac{1}{2}) \\
s &= \frac{2(1 - \frac{1}{2}^{n})}{1 - \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Dapat duga simpulan kita

$$\begin{aligned}
u_n &= ar^{n-1} \\
s_n &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}
\end{aligned}$$

Selanjutnya apabila $n \to \infty$ dan $|r| < 1$, kita menduga bahwa $r^n = 0$, sehingga

$$s_\infty = \frac{a(1-0)}{1-r}$$
$$s_\infty = \frac{a}{1-r}$$

5.4 Penggunaan barisan dan deret geometri

Misalkan kita menabung di Bank sebesar Rp 5.000.000,00, pihak bank memberikan bunga sebesar $0,5\%$ tiap bulan dengan bunga majemuk. Tentunya besar uang kita pada akhir bulan pertama adalah.

$$\begin{aligned} M_1 &= M_0 + B_1 \\ &= 5000000 + 5000000.0,5\% \\ &= 5000000(1+0,5\%) \end{aligned}$$

dan tentunya besar uang pada akhir bulan kedua adalah

$$\begin{aligned} M_2 &= M_1 + B_1 \\ &= 5000000(1+0,5\%) + 5000000(1+0,5\%).0,5\% \\ &= 5000000(1+0,5\%)(1+0,5\%) \\ &= 5000000(1+0,5\%)^2 \end{aligned}$$

karena modal awal kita belum mengalami perkembangan, maka kita dapat mengatakan bahwa

$$M_n = 5000000(1+0,5\%)^n$$

Barisan

$$M_0, M_1, M_2, ..., M_n$$

atau

$$5000000, 5000000(1+0,5\%), 5000000(1+0,5\%)^2, ..., 5000000(1+0,5\%)^n$$

membentuk sebuah barisan geometri, dengan suku awal 5000000, dan rasio $1+0,5\%$, sehingga

$$\begin{aligned} u_n &= ar^{n-1} \\ M_n &= 5000000.(1+0,5\%)^n \end{aligned}$$

dan simpulan dugaan kita

$$M_n = M_0(1+b\%)^n$$

Dapat pula kita buat simpulan, apabila sebuah benda mengalami perkembangan mengikuti seperti perkembangan uang di bank akan mengikuti persamaan diatas, dan mengalami penyusutan dengan persamaan;

$$M_n = M_0(1-b\%)^n$$

Misalkan sebuah benda atau makhluk hidup mengalami perkembangan mengalami mengikuti barisan geometri dengan perkembangan tiap bulan sebesar $b\%$ selama n bulan, dengan perkembangan pada n bulan adalah M_n dan dengan perkembangan awal M_0, mengikuti

$$M_n = M_0(1-b\%)^n$$

andaikan perkembangan itu tiap hari, persamaannya menjadi ;

$$\begin{aligned} M_n &= M_0(1-b\%)^n \\ M_{n.30} &= M_0(1+\frac{b\%}{30})^{n.30} \\ M_{n.m} &= M_0(1+\frac{b\%}{m})^{n.m} \end{aligned}$$

untuk perkembangan tiap saat, artinya $m \to \infty$ denagn matematika lanjut dapat di buat menjadi ;

$$
\begin{aligned}
M_n &= M_0(1 - b\%)^n \\
M_{n.30} &= M_0(1 + \frac{b\%}{30})^{n.30} \\
M_{n.m} &= M_0(1 + \frac{b\%}{m})^{n.m} \\
M_{m\to\infty} &= limit_{m\to\infty} M_0(1 + \frac{b\%}{m})^{n.m} \\
&= M_0 e^{b\%.n}, e = 2,7182818285...
\end{aligned}
$$

Contoh 3.5
Suatu tanaman selama setahun tingginya bertambah 4% setiap bulan. Jika pada permulaan tingginya 0,5 meter, tentukan tinggi tanaman itu setelah satu tahun.

Penyelesaian
Andaikan tananman tersebut pertumbuhannnya mengikuti barisan geometri, kita bisa membuat $b\% = 4\%$, $M_0 = 0,5$, dan $n = 12$, dengan tinggi pohan setelah satu tahun tersebut adalah

$$
\begin{aligned}
M_n &= M_0(1 + (1 + b\%)^n \\
M_{12} &= 0,5(1 + 4\%)^{12} \\
&= 0,5(1,04)^1 2 \\
&= 0,5.1,601... \\
&= 0,8005...
\end{aligned}
$$

apabila pertumbuhannya di misalkan tiap saat, maka tinggi pohon selama satu tahun adalah

$$
\begin{aligned}
M_{m\to\infty} &= limit_{m\to\infty} M_0(1 + \frac{b\%}{m})^{n.m} \\
&= M_0 e^{b\%.n}, e = 2,7182818285... \\
&= 0,5.2,71828...^{4\%.12} \\
&= 0,5.2,71828...^{\frac{48}{100}} \\
&= 0,5.2,71828...^{0,48} \\
&= 0,5.1,6160... \\
&= 0,808...
\end{aligned}
$$

Latihan Pertemuan 16

Selesaikan latihan dibawah ini pada buku latihan tulis nama dan kelas di atasnya, di foto dan di kirim kan ke wa guru pengampu sebelum pertemuan minggu berikutnya.

1.